Devoir surveillé de Mathématiques n°8

N.B : L'élève attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un élève est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1

1. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin x}$ en 0 à l'ordre 4.
2. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & 3y & + & 5z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 5x & + & 4y & - & 2z & = & 3 \end{array}\right.$.

Exercice 2 **(Approximations rationnelles de e)**

On définit $I_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, \mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2. (on pourra procéder par intégrations par parties)
2. Montrer que $|I_n| \leqslant \dfrac{e}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire qu'il existe deux suites d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $I_n = ev_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (on pourra procéder par récurrence)
5. Montrer que $u_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
6. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$.

Exercice 3 (Étude d'un projecteur)

On considère $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique et on note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que p est un projecteur.
2. Déterminer une base de Ker p et de Ker $(p - Id)$.
3. En déduire les éléments caractéristiques de p.

Exercice 4 (Équation des ondes)

On considère les équations aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned}(E) \quad : \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 0 \ , \ f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ (E') \quad : \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) &= 0 \ , \ g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\end{aligned}$$

1. Montrer que les solutions de l'équation différentielle (E') sont les fonctions de la forme $g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$ avec $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que si f est solution de (E) alors $g : (u,v) \mapsto f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$ est solution de (E').
3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 5 (Formule de Leibniz)

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre $2n$ $(n \in \mathbb{N})$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. En déduire le développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ $(n \in \mathbb{N})$ de la fonction $x \mapsto \arctan x$, on note $P_n(x)$ sa partie principale.
3. On note f_n $(n \in \mathbb{N})$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \arctan x - P_n(x)$.
   (a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$.
   (b) Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^1 f_n'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.